Elementarna matematika 1

Vježbe 9

Zadatak 12. Nađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da su brojevi $4x^2 + 3y^2$ i $3x^2 + 4y^2$ kvadrati prirodnih brojeva.

Osnovni teorem aritmetike

Za prirodan broj $a > 1$ postoje jedinstveni brojevi $\ell, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{N}$ te prosti brojevi $p_1 < p_2 < \ldots < p_\ell$ takvi da je

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\alpha_\ell}.$$

Osnovni teorem aritmetike - posljedice

Neka su $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\alpha_\ell}$ i $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\beta_\ell}$ prirodni brojevi (ovdje dozvoljavamo da su neki eksponenti α_i ili β_j jednaki 0). Tada je

$$M(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{\min(\alpha_\ell,\beta_\ell)}.$$

Nadalje, $a \mid b$ ako i samo ako je $\alpha_i \leq \beta_i$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$.

Zadatak 14. Dokažite: ako je broj n složen, onda postoji njegov djelitelj različit od 1 koji je manji ili jednak $\sqrt{n}$.

Propozicija. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te p prost broj. Tada

$$p \mid a \cdot b \Longrightarrow p \mid a \text{ ili } p \mid b.$$

Zadatak 15. Dokažite:

(a) Ako su p i $8p-1$ prosti brojevi, onda je $8p+1$ složen broj.

(b) Ako su p i $8p^2+1$ prosti brojevi, onda je $8p^2-1$ prost broj.

Zadatak 16. Odredite sve proste brojeve p, q, r za koje vrijedi jednakost $p^q = r - 1$.

Zadatak 17. Dokažite da ostatak pri dijeljenju prostog broja s 30 ne može biti složen broj (uzimamo da je ostatak između 0 i 29).

Zadatak 18. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4m+3$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Neka je funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana ovako: $\varphi(n)$ je jednak broju elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji su relativno prosti sa n. Funkciju φ zovemo **Eulerova funkcija**.

Eulerova funkcija ima sljedeća svojstva:

1. Ako su $a, b > 1$ prirodni brojevi takvi da je $M(a, b) = 1$, onda je $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
2. Ako je p prost broj i $k \geq 1$, onda je $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

Formula za $\varphi(n)$

Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ rastav broja n na proste faktore. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \\
&= (p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-2})\cdots(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}) \\
&= p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).
\end{aligned}$$

Zadatak 19. Riješite jednadžbu $\varphi(7^x) = 294$.

Zadatak 20. Dokažite da jednadžba $\varphi(n) = 14$ nema rješenja.

Zadatak 21. Odredite sve prirodne brojeve n takve da $\varphi(n) \mid n^2 + 1$.

Eulerov teorem

Neka je $n \in \mathbb{N}$, te $a \in \mathbb{Z}$ takav da je $M(a, n) = 1$. Tada vrijedi

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Mali Fermatov teorem

Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj, te $a \in \mathbb{Z}$ takav da $p \nmid a$. Tada vrijedi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Zadatak 22. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $1^{30} + 2^{30} + \cdots + 10^{30}$ brojem 11.

Zadatak 23. Dokažite da je za svaki prost broj p i svaki prirodan broj k suma

$$1 + 1^{k(p-1)} + 2^{k(p-1)} + \cdots + p^{k(p-1)}$$

djeljiva s p.

Zadatak 24. Dokažite da je za svaki prirodan broj n koji nije djeljiv s 4 zbroj

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

djeljiv s 5.

Zadatak 25. Odredite posljednju znamenku broja

$$7^{1998^{1997}} + 3^{1998^{1997}}.$$

Zadatak 26. Dokažite da je broj $2222^{5555}+5555^{2222}$ djeljiv sa 7.

Zadatak 27. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $140^{67} + 153^{51}$ brojem 17.

Zadatak 28. Dokažite da $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{2n+2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Stari zadatak iz poglavlja Matematička indukcija. Dokažite da je broj $3^{2n+2} - 8n - 9$ djeljiv sa 64 za svaki cijeli broj $n \geq 0$.

Pokušajte slično riješiti i ostale zadatke s djeljivosti iz tog poglavlja.